Übungsblatt 1 Vorkurs

Tutor: Cilian Kerskens

Aufgabe 1 – Ergebnisräume und σ-Algebren

(a) Sei der Ergebnisraum eines Münzwurfs $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$. Gib alle möglichen σ-Algebren über Ω an.

(b) Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Zeige, dass

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}$$

eine σ-Algebra ist.

(c) Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Ist die Menge $\{\emptyset, \Omega, \{1\}\}$ eine σ-Algebra? Begründe.

Aufgabe 2 – Wahrscheinlichkeitsmaß

(a) Definiere auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ die Wahrscheinlichkeitsmaß eines fairen Würfels. Berechne $\mathbb{P}(A)$ für $A = \{1, 3, 5\}$.

(b) Definiere eine *unfaire* Wahrscheinlichkeitsmaß $p(\omega)$ mit $p(6) = \frac{1}{2}$ und berechne die restlichen $p(\omega)$.

(c) Überprüfe, dass für beide Wahrscheinlichkeitsmaße gilt: $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

Aufgabe 3 – Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Beweise oder widerlege jeweils:

(a) (Monotonie) $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(b) (Subadditivität) $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

(c) (Komplement) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Aufgabe 4 – Bedingte Wahrscheinlichkeiten

(a) Zeige, dass $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist ($\mathbb{P}(B) > 0$).

(b) Zeige am Beispiel, dass $\mathbb{P}(A \mid B) \neq \mathbb{P}(B \mid A)$ im Allgemeinen.

Aufgabe 5 – Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und Bayes

(a) Es gebe zwei Maschinen M_1 und M_2, die je 50% der Produkte liefern. M_1 produziert fehlerhafte Stücke mit Wahrscheinlichkeit 0,02, M_2 mit Wahrscheinlichkeit 0,05. Berechne die Gesamtwahrscheinlichkeit eines fehlerhaften Produkts.

(b) Ein Stück ist fehlerhaft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es von M_1?