Mathe Vorkurs

Cilian Kerskens

Oktober 2025

Hey!

Hey, ich bin **Cilian**,
euer Tutor für **Mathe für Computerlinguisten**.

Hier sind meine Infos:

`kerskens@cl.uni-heidelberg.de`

Tutorium:

Donnerstags 15–17 Uhr

Seminarraum 26, INF 329

Ich freu mich auf das Semester mit euch!

Plan für heute

- Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
- Aufgaben
- Lösungen besprechen
- **Kurze Pause**
- Wiederholung von Schulmathematik
- Rechnen / Aufgaben
- Lösungen besprechen
- Beweise
- Brain-Teaser-Aufgaben
- Lösungen besprechen

Falls noch Zeit bleibt, würden wir die Axiome der reellen Zahlen besprechen.

Bei Fragen stehen wir euch jederzeit zur Verfügung.

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Was heißt es, dass etwas wahrscheinlich ist?
Ist das eine Eigenschaft der Welt oder unserer Gedanken?

Es gibt verschiede Sichten:
Laplace sah Wahrscheinlichkeit als Logik unvollständigen Wissens.
Frequentisten: Häufigkeit von Ereignissen.
Bayesianer: Maß für Überzeugung.

Eine Wahrscheinlichkeit ist irgendeine Art von Messung von Ereignissen mit:

- $\mathbb{P}(\text{Ereignis}) \geq 0$
- $\mathbb{P}(\text{Something will happen}) = 1$
- $\mathbb{P}(\text{mehrere Disjunkte Ereignisse}) = \sum_{Ereignisse} \mathbb{P}(Ereignis)$

Der Ergebnisraum

Definition

Der **Ergebnisraum** Ω ist die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments.

Jedes $\omega \in \Omega$ heißt **Ergebnis**.

Beispiele:

$\Omega := \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$ Ergebnisraum eines Münzwurfs.

$\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Ergebnisraum eines Würfels.

$\Omega := \{\mathbb{R}\}$ Ergebnisraum eines physicalisches Experiments.

$\Omega :=$
$\{(1, K), (1, Z), (2, K), (2, Z), (3, K), (3, Z), (4, K), (4, Z), (5, K), (5, Z), (6, K)$
$(6,Z)\} \Leftrightarrow \Omega \times \Omega$

Die σ-Algebra

Definition

Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) := \{A | A \subseteq \Omega\}$ heißt σ-**Algebra** über dem Ergebnisraum Ω, wenn gilt:

$\Omega \in \mathcal{F}$

$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Nicht jede Teilmenge des Ergebnisraums Ω lässt sich sinnvoll mit einer Wahrscheinlichkeit versehen. Zum Beispiel: Bei Ergebnisräumen wie $\mathbb{R}$ gibt es zu viele Mengen, um sie alle zu messen (siehe Banach-Tarski Paradox)

Die σ-**Algebra** legt fest, welche Mengen als Ereignisse gelten und damit welche Aussagen messbar sind.

Anschauliche Vorstellung einer σ-Algebra

1. Triviale σ-Algebra

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$$

Nur das sichere und das unmögliche Ereignis sind messbar.

2. Diskrete σ-Algebra

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

Alle Teilmengen von Ω sind messbar.

3. Aus einer Partition erzeugt

Für $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\Pi = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ gilt:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$$

Wir unterscheiden nur zwei Gruppen von Ergebnissen.

Messbarer Raum und Wahrscheinlichkeitsmaß

Messbarer Raum

Ein **messbarer Raum** ist ein Paar $(\Omega, \mathcal{F})$, bestehend aus:

$$\Omega \text{ (Ergebnisraum)}, \qquad \mathcal{F} \text{ (σ-Algebra)}$$

Die Mengen in $\mathcal{F}$ heißen **messbare Mengen** oder **Ereignisse**.

Wahrscheinlichkeitsmaß

Ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** ist eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ mit den **Kolmogorov-Axiomen:**

(1) $\mathrm{P(A)} \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{F}$,

(2) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$,

(3) $\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ für disjunkte $A_i \in \mathcal{F}$.

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsräume

1. Münzwurf (diskret, endlich)

$$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(\text{Kopf}) = \mathbb{P}(\text{Zahl}) = \tfrac{1}{2}$$

2. Würfel (diskret, endlich)

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \tfrac{1}{6}$$

3. Anzahl der Münzwürfe bis zum ersten Kopf (diskret, unendlich)

$$\Omega = \{1,2,3,\dots\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{n\}) = (1-p)^{n-1}p$$

Geometrische Verteilung mit Parameter $p \in (0,1)$.

4. Gleichverteilung auf dem Intervall [0,1] (stetig)

$$\Omega = [0,1], \quad \mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1]), \quad \mathbb{P}(A) = \int_A 1\,dx = \lambda(A)$$

Additive Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsraums

Endliche Additivität

Für disjunkte $(A \cap B = \emptyset)$ $A, B \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Allgemeine Additivität

Für beliebige A, B:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

σ-Additivität

Für disjunkte $(A \cap B = \emptyset)$, $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Additive Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsraums

Monotonie

Wenn $A \subseteq B$, dann $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Komplement

$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Subadditivität

$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

σ-Subadditivität

$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition

Für Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit von** A **unter** B definiert als:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Wie wahrscheinlich ist A, wenn B bereits eingetreten ist?

Multiplikationssatz

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A \mid B)$$

Grundlage für Bayes-Theorem und Unabhängigkeit.

Satz von Bayes

Satz: Satz von Bayes

Für Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit von A, wenn wir wissen, dass B eingetreten ist?

Beweis:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Unabhängigkeit von Ereignissen

Definition

Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ heißen **unabhängig**, wenn

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

Das Eintreten von A ändert nichts an der Wahrscheinlichkeit von B und umgekehrt.

Äquivalente Formulierung

Falls $\mathbb{P}(B) > 0$ und $\mathbb{P}(A) > 0$:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$$

Beispiele Rechnen

Beispiel: Unabhängige Ereignisse

Ein Würfel wird zweimal geworfen.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\{1,2,3,4,5,6\}^2, \mathcal{P}((\{1,2,3,4,5,6\}^2), \frac{|E|}{|\Omega|})$

$$A = \{\text{erster Wurf gerade}\}, \quad B = \{\text{zweiter Wurf} > 4\}$$

Dann gilt:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \Rightarrow A, B \text{ unabhängig.}$$

Bemerkung

Unabhängigkeit gilt nur, wenn kein Ereignis das andere **informiert**.
Nicht mit Disjunkt sein verwechseln!!!!

Monty Hall: Idee und Intuition

Setup

3 Türen, 1 Auto, 2 Ziegen.
Du wählst zuerst eine Tür. Monty (kennt den Ort des Autos) öffnet eine **andere** Tür mit Ziege.
Option: *Bleiben* oder *Wechseln*?

Intuition

Erstwahl richtig mit Wkt. $1/3 \Rightarrow$ Wechseln verliert.
Erstwahl falsch mit Wkt. $2/3 \Rightarrow$ Monty eliminiert eine Ziege, Wechseln gewinnt.

$$\mathbb{P}(\text{Wechsel gewinnt}) = \tfrac{2}{3}, \qquad \mathbb{P}(\text{Bleiben gewinnt}) = \tfrac{1}{3}.$$

Monty liefert **Information**: Er öffnet nie die Autotür und nie deine gewählte Tür. Wechseln nutzt diese Information vollständig aus.

Monty Hall formaler Wahrscheinlichkeitsraum

Definition des Raums.
Ein Wahrscheinlichkeitsraum

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

mit

$$\Omega = \{(C, F, M) : C, F, M \in \{1, 2, 3\}, M \neq F, M \neq C\}$$

C = Position des Autos, F = Erstwahl der Spielerin, M = von Monty geöffnete Tür.

Falls $C = F$, wählt Monty zufällig eine der beiden anderen Türen.
Die σ-Algebra ist $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, und

$$\mathbb{P}(C = i) = \tfrac{1}{3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Türen $\{1,2,3\}$, $C =$ Autotür, $F =$ Erstwahl, $M =$ von Monty.

$$\mathbb{P}(C=c) = \tfrac{1}{3}\ (c=1,2,3), \qquad \mathbb{P}(M=j \mid C,F) = \begin{cases} 1, & j \neq F,\ j \neq C, \\ \tfrac{1}{2}, & C = F,\ j \neq F, \\ 0, & j = C \text{ oder } j = F. \end{cases}$$

Fixiere beliebig $F = i$ und beobachte $M = j$ mit $j \neq i$. Bezeichne die verbleibende geschlossene Tür mit R, also $\{i,j,R\} = \{1,2,3\}$.

$$\mathbb{P}(C=i \mid M=j, F=i) = \frac{\mathbb{P}(C{=}i)\,\mathbb{P}(M{=}j|C{=}i,F{=}i)}{\sum_{c\in\{i,j,R\}} \mathbb{P}(C{=}c)\,\mathbb{P}(M{=}j|C{=}c,F{=}i)} =$$

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{1}{3}.$$

$$\mathbb{P}(C=R \mid M=j, F=i) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{2}{3}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{Gewinn: Wechsel} \mid M=j, F=i) = \frac{2}{3}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{Gewinn: Bleiben} \mid M=j, F=i) = \frac{1}{3}}$$

Grundlagen der Wahrscheinlichkeit

Begriff	**Definition / Formel**
Ergebnisraum Ω	Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments.
σ-**Algebra** $\mathcal{F}$	$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit: $\Omega \in \mathcal{F}$; $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$; $A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$.
Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$	$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ mit: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ und $\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$ für disjunkte A_i.
Wahrscheinlichkeitsraum	$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kombiniert Ergebnisraum, σ-Algebra und Maß.
Diskreter Fall (PMF)	$p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$, $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. $\quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$.
Grundlegende Eigenschaften	*(Nichtnegativität)* $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ *(Monotonie)* $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ *(Additivität)* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *(Subadditivität)* $\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mathbb{P}(A_i)$ *(Komplement)* $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
Bedingte Wahrscheinlichkeit	$\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$, $\mathbb{P}(B) > 0$.
Totale Wahrscheinlichkeit / Bayes	$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)$, $\quad \mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\sum_i \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}$.
Unabhängigkeit	$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Mathematische Grundlagen Rechnen & Algebra

Arithmetik

$$(a \pm b) \pm c = a \pm (b \pm c), \quad a(b + c) = ab + ac$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Kürzen, Nenner rationalisieren

Potenzen & Wurzeln

$$a^m a^n = a^{m+n}, \ (a^m)^n = a^{mn}, \ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \ \sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$$

Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Logarithmen

$$\log(ab) = \log a + \log b, \ \log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log(a^k) = k \log a, \ \log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$$

$$10^{\log_{10} x} = x, \ e^{\ln x} = x$$

Polynome & Faktorisierung

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \ x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$x^2 + 2x = x(x + 2), \ x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

÷ Polynomdivision mit bekannter Nullstelle & Partialbrüche

Prinzip (Restwertsatz)
Wenn $f(a) = 0$, dann $x - a$ ist Faktor und

$$f(x) = (x - a)\, q(x), \quad \deg q = \deg f - 1.$$

Vorgehen

Nullstelleprfen :f(a)=0.

Durch $x - a$ dividieren $\Rightarrow q(x)$.

$q(x)$ faktorisieren.

Beispiel: Wurzeln finden

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \quad f(1) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 1)\,(x^2 - 5x + 6)$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

$$\boxed{\text{Nullstellen: } x = 1, 2, 3}$$

Partialbruchzerlegung (reell, kompakt)
Für verschiedene Linearfaktoren:

$$\frac{P(x)}{\prod_i (x - r_i)} = \sum_i \frac{A_i}{x - r_i}, \quad A_i = \left.\frac{P(x)}{\prod_{j \neq i} (x - r_j)}\right|_{x = r_i}.$$

Beispiel:

$$\frac{2x + 3}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}$$

$$A = \tfrac{5}{2}, \quad B = -7, \quad C = \tfrac{9}{2}$$

$$\boxed{\frac{2x + 3}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{5/2}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{9/2}{x-3}}$$